Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

9. Februar. № 1. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung den 8. Januar 1887.

Erläuterungen zur Theorie der sogen. allgemeinen complexen Größen.

Von

R. Dedekind, ausw. Mitgl.

Seit dem Erscheinen der auf diese Theorie bezüglichen Abhandlung des Herrn Weierstraß (im Jahrgange 1884 dieser Nachrichten, S. 395) und der meinigen (1885, S. 141) habe ich bei mündlichen und brieflichen Unterhaltungen öfter die Erfahrung gemacht, daß die in beiden Schriften niedergelegten Auffassungen nicht mit hinreichender Deutlichkeit von einander unterschieden werden. Da vielleicht meine Darstellung hieran die Schuld trägt, so erlaube ich mir noch einmal auf denselben Gegenstand zurückzukommen. Es handelt sich um die Auslegung des bekannten Ausspruches von Gauß:

»Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird.« (Gauß Werke, Bd. II. S. 178).

Herr Weierstraß faßt (S. 410—411 l. c.) seine Ansicht in folgende Worte:

»Wenn ich nun mit dem Ergebniß der vorstehenden Untersuchung die im Anfange angeführte Gaußische Bemerkung, daß complexe Größen mit mehr als zwei Haupteinheiten in der allgemeinen Arithmetik *unzulässig seien, zusammenhalte*, so scheint es mir, daß Gauß diese Unzulässigkeit als dadurch begründet angesehen habe, daß das Product zweier Größen, sobald $n > 2$, verschwinden kann, ohne daß einer seiner Factoren den Werth Null hat. Denn hätte er diesen Umstand nicht als ein unübersteigliches Hinderniß für die Einführung der *allgemeinen complexen* Größen in die Arithmetik betrachtet, so würde es ihm schwerlich entgangen sein, daß sich eine Arithmetik dieser Größen begründen läßt, in welcher alle Sätze entweder mit denen der Arithmetik der gewöhnlichen complexen Größen identisch sind oder doch in der letzteren ihr Analogon finden. Er würde dann auch ohne Zweifel seinen Ausspruch dahin modificirt haben, daß die Einführung der allgemeinen complexen Größen in die Arithmetik zwar nicht unstatthaft, wohl aber überflüssig sei. In der That geht aus dem oben (Seite 407) ausgesprochenen Satze hervor, daß die Arithmetik der allgemeinen complexen Größen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der complexen Größen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne Weiteres ableitbar wäre.«

Von dieser Auffassung weicht die meinige (vgl. S. 142, 147, 156 l. c.) erheblich, nämlich in dem *Hauptpuncte* ab, daß ich den Größen, welche im Vorstehenden allgemeine complexe Größen genannt werden, den Charakter der Neuheit gänzlich versage; es handelt sich in unserem Jahrhundert nicht mehr um ihre Zulassung, sie sind vielmehr schon lange und mit großem Erfolge in die allgemeine Arithmetik zugelassen; sie bilden, wie gesagt, keine neue oder — um buchstäblich genau mit Gauß zu reden — keine andere Art von Größen, sondern sie sind geradezu identisch mit den überall in der Algebra eingebürgerten mehrwerthigen gewöhnlichen Zahlen; es ist unmöglich, jene von diesen zu unterscheiden, und die letzteren bieten bei folgerichtiger Ausbildung ihres Begriffes auch schon die erwähnte Erscheinung dar, daß ein Product aus nicht verschwindenden Factoren sehr wohl verschwinden kann. In allem Diesen glaube ich die Bedeutung und die volle Bestätigung des Ausspruches von Gauß zu erkennen.

Da ich den in meiner Schrift gegebenen allgemeinen Beweisen, auf welche ich diese meine Auffassung gründe, und welche, wie ich gern hinzufüge, dem Wesen nach auch in den analytischen Entwickelungen des Herrn Weierstraß enthalten sind, Nichts hinzuzufügen habe, so begnüge ich mich, die beiden verschiedenen Auffassungen durch einige Beispiele zu erläutern, weil diese oft eine weit größere überzeugende Kraft besitzen, als eine allgemeine Theorie.

Jedes Beispiel für unsere Untersuchung ist dann ein vollkommen bestimmtes, sobald die Producte von je zwei der Haupteinheiten linear durch die letzteren dargestellt sind. Ich wähle zunächst ein System von drei Haupteinheiten e_1, e_2, e_3 mit folgenden Grundformeln

$$\begin{aligned}
e_1^2 &= -2e_1 - e_2 - 2e_3\\
e_2^2 &= -2e_1 - 2e_2 - e_3\\
e_3^2 &= -e_1 - 2e_2 - 2e_3\\
e_2 e_3 &= e_1 + e_2\\
e_3 e_1 &= e_2 + e_3\\
e_1 e_2 &= e_1 + e_3.
\end{aligned}$$

Dieselben erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, alle die Bedingungen, welche sich aus dem sogen. associativen Gesetz der Multiplication ergeben. Behält man ferner die von mir (l. c. S. 147) gewählten Bezeichnungen bei, so findet man

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_3 = -1\\
\tau_{11} &= \tau_{22} = \tau_{33} = 5\\
\tau_{23} &= \tau_{31} = \tau_{12} = -2\\
\Delta &= 49,
\end{aligned}$$

und weil die Determinante Δ nicht verschwindet, so sind auch die von Herrn Weierstraß aufgestellten Zulässigkeits-Bedingungen erfüllt; mithin würden die Größen e_1, e_2, e_3 wirklich die Haupteinheiten eines zulässigen Systems complexer Größen von der Form

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$$

bilden, wo die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 alle reellen Werthe durchlaufen. Allein ich kann nicht glauben, daß Gauß hierin eine neue (andere) Art von Größen erblickt haben würde. In der That, es ist unmög-

1*

lich, irgend eine Eigenschaft, eine Thatsache anzugeben, durch welche diese Größen e_1, e_2, e_3 sich von den dreiwerthigen Kreistheilungs-Perioden

$$e_1 = r + r^{-1},\ e_2 = r^2 + r^{-2},\ e_3 = r^3 + r^{-3}$$

unterscheiden, wo r unbestimmt jede Wurzel der Gleichung

$$r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0$$

bedeutet.

Genau so verhält es sich, wie ich gezeigt habe, in jedem anderen Beispiele. Ich führe noch die beiden folgenden an:

$$e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2^2 = e_3,\ e_3^2 = e_3,$$
$$e_2 e_3 = e_2,\ e_3 e_1 = e_2 + e_3,\ e_1 e_2 = e_2 + e_3$$

und

$$e_1^2 = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2^2 = e_3,\ e_3^2 = -e_3,$$
$$e_2 e_3 = -e_2,\ e_3 e_1 = -e_2 + e_3,\ e_1 e_2 = e_2 + e_3.$$

Alle Bedingungen der Weierstraß'schen Theorie sind erfüllt, aber ich kann die Haupteinheiten e_1, e_2, e_3 nicht für eine neue Art von Größen ansehen, weil sie schlechterdings nicht zu unterscheiden sind von den gewöhnlichen mehrwerthigen Größen

$$e_1 = 1 + r,\ e_2 = r,\ e_3 = r^2,$$

wo r jede Wurzel der cubischen Gleichung

$$r^3 - r = 0$$

im ersten Fall, im zweiten der Gleichung

$$r^3 + r = 0$$

bedeutet.

Um die Erscheinung des Verschwindens von Producten aus nicht verschwindenden Factoren im Reiche der gewöhnlichen, aber mehrwerthigen Zahlen zu erläutern, schicke ich folgende Bemerkung voraus. Ist r eine n-werthige [1]) Zahl, d. h. bedeutet r unterschiedslos jeden der n von einander verschiedenen bestimmten Zahlwerthe

$$r',\ r'' \ldots r^{(n)},$$

so wird folgerichtig, wenn $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ganze Functionen einer Veränderlichen t mit bestimmten (d. h. einwerthigen) Coefficienten sind, die Behauptung

$$\varphi(r) = \psi(r)$$

1) Wenn man lieber will, so mag man r eine veränderliche Größe nennen, deren Gebiet auf n bestimmte, von einander verschiedene Werthe r', $r'' \ldots r^{(n)}$ beschränkt ist.

stets und nur dann für wahr gelten, wenn die n Bedingungen

$$\varphi(r') = \psi(r'),\ \varphi(r'') = \psi(r'') \ldots \varphi(r^{(n)}) = \psi(r^{(n)})$$

sämmtlich erfüllt sind, d. h. wenn die ganze Function $\varphi(t) - \psi(t)$ durch die ganze Function

$$f(t) = (t - r')(t - r'') \ldots (t - r^{(n)})$$

theilbar ist.

Ist daher z. B. r eine zweiwerthige Größe, welche unterschiedslos jeden der beiden Werthe ± 1 bedeutet, so verschwindet weder die Größe $r + 1$ noch $r - 1$, aber ihr Product $r^2 - 1$ verschwindet.

Man sage nicht, dies sei nur künstlich herbeigezogen, um den bisher in die allgemeine Arithmetik eingeführten Größen eine Eigenschaft zuzusprechen, die eigentlich nur einer ganz neuen Art von Größen beigelegt werden dürfte. Dem ist keineswegs so. Daß diese Eigenschaft der gewöhnlichen mehrwerthigen Größen selten oder vielleicht niemals ausdrücklich erwähnt ist, findet seinen Grund darin, daß sie bei den meisten Beispielen wegen der besonderen Beschaffenheit derselben gar nicht zum Vorschein kommt, während sie bei allgemein gehaltenen Untersuchungen selbstverständlich ist und gerade deshalb kaum Erwähnung verdient. In der That, eins der bekanntesten Beispiele mehrwerthiger Zahlen wird von der Theorie derjenigen Zahlengebiete geliefert, die ich endliche Körper genannt habe; hier liegt die Sache so, daß r jede Wurzel einer sogen. irreducibelen Gleichung $f(r) = 0$ bedeutet, deren Coefficienten rationale Zahlen sind, und außerdem werden auch nur rationale Coefficienten in den aus r gebildeten Größen $\varphi(r)$ geduldet; es ist lediglich eine Folge dieser besonderen Beschränkungen, daß ein Product aus zwei nicht verschwindenden Factoren $\varphi(r)$ ebenfalls niemals verschwinden kann. Der bekannteste specielle Fall ist wohl der der Kreistheilung, welchen Gauß in der siebenten Section der Disquisitiones Arithmeticae behandelt hat; im Art. 339 wird, wenn n eine Primzahl bedeutet, unter r jede Wurzel der Gleichung $R = 0$ verstanden, wo

$$R = r^{n-1} + r^{n-2} + \text{etc.} + r + 1,$$

und im Art. 341 wird bewiesen, daß diese Gleichung irreducibel ist; so lange r diese Bedeutung einer $(n-1)$-werthigen Größe behält, gilt der Satz, daß ein Product aus zwei nicht verschwindenden, rational gebildeten Factoren $\varphi(r)$ ebenfalls nicht verschwindet, und bei Umformungen von Zahlen $\varphi(r)$ in $\psi(r)$ dürfen alle und nur solche Glieder weggelassen werden, die den Factor R enthalten. Aber aus nahe liegenden Gründen führt Gauß, was bemerkt zu werden verdient, die meisten (doch nicht alle) solchen Umformungen so aus, daß sie auch noch für $r = 1$ gültig bleiben, wodurch der Grad der Mehrwerthigkeit erhöht wird; in allen diesen Fällen ist daher weder der Factor R noch der Factor $r - 1$ als verschwindend anzusehen wohl aber ihr Product $r^n - 1$. Dies wird freilich nirgends ausdrücklich erwähnt, aber thatsächlich verhält es sich so.

Auch die Geometrie kann leicht Veranlassung zur Betrachtung mehrwerthiger Größen geben, bei welchen dieselbe Erscheinung auftritt. Sind z. B. drei Puncte M', M'', M''' durch ihre Cartesischen Coordinaten gegeben,

$$\begin{array}{lcl} M' & \text{durch} & 1,\quad 0,\ 0 \\ M'' & \text{»} & 2,\quad 1,\ 1 \\ M''' & \text{»} & 0, -1,\ 1 \end{array}$$

und handelt es sich darum, alle algebraischen Flächen zu bestimmen, welche durch alle drei Puncte gehen, so läuft dies darauf hinaus, alle die rationalen Gleichungen zwischen drei Größen e_1, e_2, e_3 aufzustellen, welche durch jedes der drei obigen Systeme von je drei Coordinaten befriedigt werden. Diese Größen e_1, e_2, e_3 bilden daher ein solches mehrwerthiges System, wie ich es im ersten Theile meiner Abhandlung (S. 143—147) betrachtet habe, und zwar sind die Grundformeln für die Multiplication diejenigen, welche sich oben im zweiten meiner drei Beispiele finden. Die einzige für e_1, e_2, e_3 geltende lineare Gleichung

$$e_1 - e_2 = 1$$

entspricht der durch die drei Puncte M', M'', M''' gelegten Ebene; von den drei linearen Größen

$$e_1 - e_2 - e_3,\ e_2 + e_3,\ e_2 - e_3,$$

welche den durch den Nullpunct und je zwei der Puncte M', M'', M''' gelegten Ebenen entsprechen und nach Herrn Weierstraß zweckmäßig Theiler der Null genannt werden können, verschwindet keine, wohl aber verschwinden die Producte aus je zwei verschiedenen von ihnen, was sich geometrisch von selbst versteht.

Nachdem ich versucht habe, meine Deutung des Ausspruches von Gauß durch die vorstehenden Beispiele zu erläutern, glaube ich zu Gunsten derselben noch Folgendes anführen zu dürfen. Die Grundlage für die Untersuchungen des Herrn Weierstraß (und ebenso der meinigen) über die Zulässigkeit allgemeiner complexer Zahlen, welche linear aus n Haupteinheiten gebildet sind, besteht in der Forderung, daß die (von der Ordnung der Factoren unabhängigen) Producte aus je zwei Haupteinheiten sich wieder linear durch die

Haupteinheiten darstellen lassen, und es darf wohl als sicher angenommen werden, daß Gauß von derselben Grundlage ausgegangen ist. Vergleicht man nun hiermit den Art. 345 der Disquisitiones Arithmeticae, in welchem Gauß den für die Kreistheilung äußerst wichtitigen Satz aufstellt, daß die Producte aus je zwei sogen. Perioden sich linear durch die Perioden darstellen lassen, so springt die Aehnlichkeit jener arithmetischen Untersuchung über allgemeine complexe Größen mit dieser, freilich sehr speciellen algebraischen Untersuchung über mehrwerthige Größen der Kreistheilung so in die Augen, daß ich glauben möchte, Gauß müßte dieselbe sofort bemerkt haben und dadurch auf den Gedanken gekommen sein, daß jene hypothetischen complexen Größen auch nichts Anderes sind als gewöhnliche, aber mehrwerthige Größen. Doch sind dies natürlich nur Wahrscheinlichkeitsgründe, welche die Streitfrage nicht entscheiden können, und darüber wird man vermuthlich auch nicht mehr hinauskommen, weil jeder weitere Anhalt zu fehlen scheint.